第27卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 2
2010年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0225-08

基于投影法求解不可压缩流的高精度紧致格式*

王 坪， 田振夫†

(复旦大学力学与工程科学系，上海 200433)

摘 要: 本文建立了一种基于投影法的求解不可压缩Navier-Stokes (N-S) 方程的高精度紧致差分格式。该方法时间上采用Kim和Moin二阶投影法离散，空间上采用高精度紧致格式离散，并提出了一种新的离散压力边界的紧致格式，同时对计算结果进行分析以验证该投影法的精度和格式稳定性。文中Taylor涡列数值计算结果表明，Kim和Moin投影法能使得压力场和速度场均达到时间二阶精度，且高精度紧致格式投影法也具有空间高阶精度。驱动方腔数值模拟结果显示，本文对N-S方程的离散格式具有很好的可靠性，适用于对复杂流体流动的小尺度问题的数值模拟和研究。

关键词: 紧致格式；不可压缩流；二阶投影法；Navier-Stokes方程

分类号: **AMS**(2000) 65M06; 76M20 **中图分类号**: O35 **文献标识码**: A

1 引言

描述不可压缩非定常流体的控制方程为Navier-Stokes (N-S) 方程组，其无量纲形式可写为

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{u}, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{u}=0, \tag{2}$$

其中$\vec{u}$为速度矢量，p为压力，Re为雷诺数。

N-S方程组不是完全时间发展型方程，在每个时间步上速度必须满足散度为零的约束条件(2)，并出现压力-速度耦合现象。N-S方程组的求解难点在于如何将速度和压力解耦求解。投影法的基本思想是通过引入一个无需满足散度为零约束条件的中间变量对压力速度解耦并求解，通过这种算子分裂后分步求解的方式能够高效率地计算非定常问题，因而得到了非常广泛的应用。最初由Chorin[1]提出的投影法只具有时间一阶精度，之后很多学者发展了提高时间精度的投影法。Kim和Moin提出了一种具有时间二阶精度的无压力投影法[2]，Van kan和Bell等人提出了一种简化中间变量边界条件的压力投影法[3,4]，刘淼儿，任玉新等人对投影方法研究进展进行了综述，并发展了二阶迭代投影法以及时间上具有三阶精度的投影法[5-7]，Brown，Cortez等人对不同的投影法作了具体的精度分析并提出了改进的方法[8]。

在流体模拟中，很多问题都是小尺度流动。相对低精度格式，高阶紧致格式由于具有精度高的优点而能更好地模拟小尺度问题[9]。对于光滑问题，紧致格式还能降低对网格基架点的要求，从而提高计算效率。相对于对称格式，迎风格式具有的耗散性可以压制数值解中非物理高频振荡，因此迎风格式得到很大的发展，并出现了各种高精度迎风格式[10,11]。为了提高逼

收稿日期: 2009-09-22. **作者简介**: 王坪 (1985年11月生)，男，硕士. 研究方向：计算流体力学.

*__基金项目__: 国家自然科学基金 (10662006; 10972058).

†**通讯作者**: 田振夫 E-mail: zftian@fudan.edu.cn

近解率，我们将五阶紧致迎风格式和四阶紧致迎风格式进行加权得到了一种组合迎风紧致格式[12]。Abide 和 Viazzo 以 Kim 和 Moin 无压力投影法为基础发展了一种高精度对称紧致格式的投影法[13]，计算结果显示压力场和速度场在空间上能达到高阶精度，但在时间层上压力场却只有一阶精度，但 Brown[8] 通过正则模态分析认为该投影法的压力场具有时间二阶精度。本文基于无压力投影法[2]，发展了一种不可压缩流动 N-S 方程组的高精度紧致差分格式。该方法在时间上采用 Kim 和 Moin 投影法离散，空间上采用紧致格式离散，并提出了一种新的压力边界离散格式。本文所采用的数值算例中，Taylor 涡列数值计算结果很好地验证了 Kim 和 Moin 投影法能使得压力和速度在时间上均达到二阶精度，且在空间上达到了四阶精度；驱动方腔算例的计算结果显示本文格式具有很好的计算稳定性和可靠性，同时对于复杂流体流动的小尺度问题也有很好的模拟结果。

2 控制方程的离散和数值算法

2.1 控制方程的时间离散

不可压 N-S 方程在时间上的二阶精度离散格式为

$$\begin{aligned} &\frac{\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{n}}{\Delta t}+(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^{n+\frac{1}{2}}=-\nabla p^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\mathrm{Re}}\nabla^{2}(\vec{u}^{n+1}+\vec{u}^{n}),\\ &\nabla\cdot\vec{u}^{n+1}=0, \end{aligned}\tag{3}$$

其中 Δt 为时间步长，对流项 $(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^{n+\frac{1}{2}}$ 可采用 Adams-Bashforth 的二阶格式处理如下：

$$(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^{n+\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^{n}-\frac{1}{2}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^{n-1},\tag{4}$$

速度相应的边界条件为 Dirichlet 边界条件

$$\vec{u}^{n+1}\big|_{\partial\Omega}=\vec{u}_b^{n+1}.\tag{5}$$

投影法是根据 Helmholtz-Hodge 分解定理，引入一个中间速度场和压力场，对速度和压力解耦后分步计算，从而把 (3) 式的求解分为预算步，修正步以及最终步。本文采用的是 Kim 和 Moin 提出的二阶投影法，具体步骤如下。

步骤 1 预算步。引入中间速度场并求解

$$\frac{\vec{u}^{*}-\vec{u}^{n}}{\Delta t}+\frac{3}{2}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^{n}-\frac{1}{2}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^{n-1}=\frac{1}{2\mathrm{Re}}\nabla^{2}(\vec{u}^{*}+\vec{u}^{n}),\tag{6}$$

$$\begin{aligned} &n\cdot\vec{u}^{*}\big|_{\partial\Omega}=n\cdot\vec{u}^{n+1}\big|_{\partial\Omega},\\ &\tau\cdot\vec{u}^{*}\big|_{\partial\Omega}=\tau\cdot\vec{u}^{n+1}\big|_{\partial\Omega}+\Delta t\cdot\nabla\phi^{n}\big|_{\partial\Omega}, \end{aligned}\tag{7}$$

其中 $\vec{u}^{*},\phi^{n}$ 分别为中间速度场和中间压力场，且中间速度场没有散度为零的条件限制。式 (7) 是 Kim 和 Moin 提出的中间速度边界条件。

步骤 2 修正步。通过下式对预算步得到 $\vec{u}^{*}$ 的进行修正

$$\vec{u}^{*}=\vec{u}^{n+1}+\Delta t\cdot\nabla\phi^{n+1},\tag{8}$$

$$\nabla\cdot\vec{u}^{n+1}=0,\tag{9}$$

其中 ϕ^{n+1} 表示对 $p^{n+\frac{1}{2}}$ 的某种近似，我们称为中间压力场，应满足

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \phi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\nabla^2\phi^{n+1}, \tag{10}$$

修正后速度 u^* 的散度为零，既满足连续性方程，且满足动量方程。

对式 (8) 两端取散度，并结合式 (9) 得到压力 Poisson 方程，并添加边界条件，得到

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi^{n+1} &= \frac{\nabla\cdot\vec{u}^*}{\Delta t}, \\ \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

步骤3　最终步。求出 $\vec{u}^*$ 和 ϕ^{n+1} 后，利用下式可以更新 $\vec{u}^{n+1}$ 以及 $p^{n+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \vec{u}^{n+1} &= \vec{u}^* - \Delta t\cdot\nabla\phi^{n+1}, \\ p^{n+\frac{1}{2}} &= \phi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\nabla^2\phi^{n+1}. \end{aligned} \tag{12}$$

2.2　控制方程的空间离散

控制方程中的对流项我们可采用迎风格式来逼近，对流项可用如下的分裂形式表示

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = u^+\frac{\partial u}{\partial x} + u^-\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{13}$$

其中

$$u^+ = \frac{u+|u|}{2},\quad u^- = \frac{u-|u|}{2},$$

这里 $u^+\frac{\partial u}{\partial x}$，$u^-\frac{\partial u}{\partial x}$ 分别采用 u^+F^+，u^-F^- 逼近，而 F_i 表示一阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在点 i 处的逼近值，我们采用如下的四阶迎风格式逼近

$$\begin{cases} F_{i-1}^+ + 2F_i^+ = \dfrac{1}{h}\Big(-\dfrac{7}{2}u_{i-1} + 4u_i - \dfrac{1}{2}u_{i+1}\Big) + hS_i, \\ 2F_i^- + F_{i+1}^- = \dfrac{1}{h}\Big(\dfrac{1}{2}u_{i-1} - 4u_i + \dfrac{7}{2}u_{i+1}\Big) - hS_i, \end{cases} \tag{14}$$

其中 S_i 表示二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 在点 i 处的逼近值，可采用四阶 Padé 格式逼近。另外，在计算中涉及到的压力梯度项的求解，我们采用一阶导数四阶对称 Padé 紧致格式逼近。

3　Poisson 方程的数值算法

在投影法中，最关键的预算步和修正步都可以归纳于求解 Poisson 方程。动量方程 (6) 和压力 Poisson 方程 (11) 可以统一写成如下 Poisson 方程形式

$$\nabla^2\Phi = f, \tag{15}$$

$\Phi = \vec{u}^*$ 时，式 (15) 表示动量方程 (6)，$\vec{u}^*$ 的边界条件为 Dirichlet 边界条件。相应地

$$f = S + \frac{2\mathrm{Re}}{\Delta t}\vec{u}^*,\quad S = 2\mathrm{Re}\cdot\Big[\frac{3}{2}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^n - \frac{1}{2}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})^{n-1}\Big] - \frac{2\mathrm{Re}}{\Delta t}\vec{u}^n - \nabla^2\vec{u}^n,$$

$\Phi=\phi$时，式(15)表示动量方程(11)，ϕ的边界条件为Neumann边界条件。相应地

$$f=\frac{\nabla\cdot\vec{u}^*}{\Delta t}.$$

3.1 Poisson方程的高精度紧致差分格式

为了提高计算效率以及保证压力和速度的精度，我们采用四阶九点紧致格式[14]对方程(15)进行离散，其四阶九点紧致离散格式如下

$$4\sum_{i=1}^{4}\Phi_i+\sum_{i=5}^{8}\Phi_i-20\Phi_0=\frac{h^2}{2}\Big(\sum_{i=1}^{4}f_i+8f_0\Big). \tag{16}$$

当$\Phi=\vec{u}^*$时，将$f=S+\dfrac{2\mathrm{Re}}{\nabla t}\vec{u}^*$代入(16)可得

$$\Big(4-h^2\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\Big)\sum_{i=1}^{4}\vec{u}_i^*+\sum_{i=5}^{8}\vec{u}_i^*-\Big(20+8h^2\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}\Big)\vec{u}_0^*=\frac{h^2}{2}\Big(\sum_{i=1}^{4}S_i+8S_0\Big), \tag{17}$$

结合Dirichlet边界条件，采用ADI线(松驰)迭代法对式(17)进行求解。

3.2 压力Poisson方程的边界处理

由于压力Poisson方程(11)具有Neumann边界条件，为了保证格式的整体精度以及稳定性，我们对Neumann边界条件$\frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0$构造了一种新的紧致格式。例如，在右边界及其右上角点的离散格式为

$$\begin{cases}\phi_{i+1,j}+\dfrac{1}{2}(\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1})-2\phi_{i,j}=\dfrac{h^2}{2}f+O(h^3),\\ \phi_{i+1,j}+\phi_{i,j-1}-2\phi_{i,j}=\dfrac{h^2}{2}f+O(h^3),\end{cases} \tag{18}$$

式(18)是一种具有三阶精度的紧致离散格式，在后文的数值计算中也显示，该离散格式在边界点并无损失精度从而保证了算法的整体精度。结合内点的离散方程(16)即得到一封闭的方程组，采用ADI线(松驰)迭代法进行求解。

3.3 压力Poisson方程解的唯一性

对于具有Neumann边界条件的压力Poisson方程

$$\begin{aligned}&\nabla^2\phi=f,\\&\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0,\end{aligned} \tag{19}$$

其解并不唯一。采用文献[15]的策略，我们可以添加一个附加条件，使方程(19)变为

$$\begin{cases}\nabla^2\phi=f,\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0,\\ \sum\phi_{i,j}=0,\end{cases} \tag{20}$$

增加附加条件$\sum\phi_{i,j}=0$后的方程(20)具有唯一解，此解同样满足原方程(19)[15]。

4 数值算例

4.1 Taylor 涡列问题

Taylor 涡列问题有如下精确解

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= -\exp(-2t\pi^2/\mathrm{Re})\cos(\pi x)\sin(\pi y),\\
v(x,y,t) &= \exp(-2t\pi^2/\mathrm{Re})\sin(\pi x)\cos(\pi y),\\
p(x,y,t) &= -\frac{1}{2}\exp(-4t\pi^2/\mathrm{Re})\big[\cos^2(\pi x)+\cos^2(\pi y)\big],
\end{aligned}
\tag{21}
$$

该问题经常被用来判断数值方法精度和算法的可靠性。选取空间区域为$0 \le x,\ y \le 1$, $\mathrm{Re} = 10$。为了判断本文格式的时间精度，我们选择不同的时间步长来计算在空间步长为$h = 1/58$, $t = 0.3$时刻下的最大绝对误差。表1结果显示，本文的投影法格式使速度场和压力场均达到了二阶精度，压力场的收敛精度略小于速度场的精度。同时，为了判断本文格式的空间精度，我们选取时间步长为$\tau = 1/2000$，在$t = 0.3$时刻不同空间步长下的最大绝对误差。表2结果显示，本文格式能够保证压力场和速度场均能达到空间四阶精度。

表1: 空间步长$h = 1/58$, $t = 0.3$时刻的最大绝对误差

h	τ	u	rate	v	rate	p	rate
1/58	1/250	1.0695E-5		1.0701E-5		2.1210E-4	
	1/300	7.2263E-6	2.150	7.2358E-6	2.146	1.5159E-4	1.842
	1/400	3.8094E-6	2.226	3.8162E-6	2.223	8.4082E-5	2.049
	1/500	2.2735E-6	2.313	2.2754E-6	2.317	5.3771E-5	2.003
	1/600	1.4654E-6	2.408	1.4688E-6	2.408	3.7779E-5	1.936

表2: 时间步长$\tau = 1/2000$, $t = 0.3$时刻的最大绝对误差

τ	h	u	rate	v	rate	p	rate
1/2000	16	5.4657E-4		5.4501E-4		2.0832E-2	
	32	3.9623E-5	3.786	3.9536E-5	3.785	1.8280E-3	3.511
	48	8.4159E-6	3.812	8.4021E-6	3.819	3.5695E-4	4.028
	64	2.7914E-6	3.836	2.7890E-6	3.833	1.0845E-4	4.141
	96	6.0528E-7	3.770	6.0400E-7	3.773	2.1065E-5	4.042

4.2 驱动方腔问题

驱动方腔流是检验数值方法稳定性的常用算例。本文采用文献[16]中的修正驱动方腔，其上壁的边界条件为$u = 16x^2(1-x)^2$，$v = 0$，其余壁处的水平速度和垂直速度均为0。本文取时间步长为$\tau = 1/500$，空间网格为128×128进行计算。计算结果与Shen[16]的结果非常相近，对主涡和小涡的大小及位置都有非常好的捕捉。表3为本文格式所得到的涡心大小及位置与文献[16]的对比。结果显示，本文对主涡和二次涡的物理特征有很好的模拟结果。图1和图2分别为$\mathrm{Re} = 400, 1000, 2000$和$\mathrm{Re} = 5000, 7500, 10000$时方腔流动达到稳定后的流线图。

表 3: 主涡及底部二次涡位置及流函数值与文献的比较

	Re	原始涡心处 ψ(坐标)	左下角涡心处 ψ(坐标)	右下角涡心处 ψ(坐标)
文献 [16]	400	-0.0858(0.578,0.625)	6.31E-6(0.031,0.047)	1.98E-4(0.922,0.094)
当前		-0.0859(0.578,0.617)	5.59E-6(0.039,0.047)	2.18E-4(0.914,0.094)
文献 [16]	1000	-0.0871(0.547,0.578)	8.28E-4(0.078,0.063)	5.68E-4(0.922,0.094)
当前		-0.0873(0.539,0.570)	8.44E-4(0.078,0.070)	6.41E-4(0.914,0.094)
文献 [16]	2000	-0.0877(0.531,0.547)	3.54E-4(0.094,0.094)	8.08E-4(0.922,0.094)
当前		-0.0883(0.531,0.555)	3.61E-4(0.086,0.094)	9.26E-4(0.914,0.094)
文献 [16]	5000	-0.0880(0.516,0.531)	7.53E-4(0.094,0.094)	7.75E-4(0.922,0.094)
当前		-0.0891(0.516,0.539)	7.56E-4(0.094,0.094)	9.09E-4(0.914,0.094)
当前	7500	-0.0892(0.516,0.539)	7.03E-4(0.094,0.094)	8.05E-4(0.914,0.094)
文献 [16]	10000	-0.0883(0.536,0.531)	7.92E-4(0.094,0.094)	3.25E-4(0.922,0.094)
当前		-0.0893(0.516,0.531)	7.94E-4(0.094,0.094)	4.17E-4(0.914,0.094)

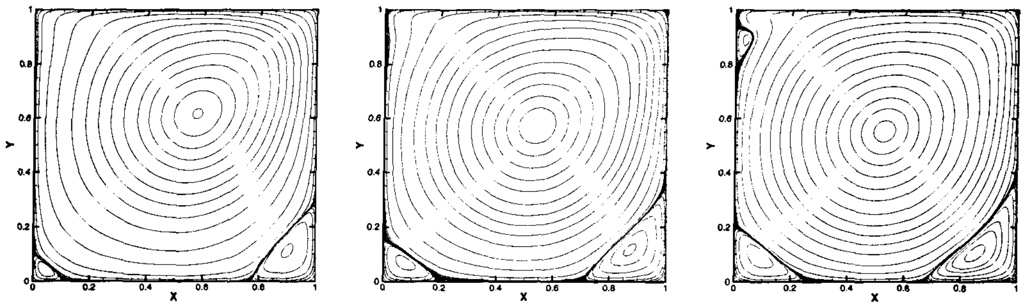

图 1: Re=400, 1000, 2000 方腔内部流线图

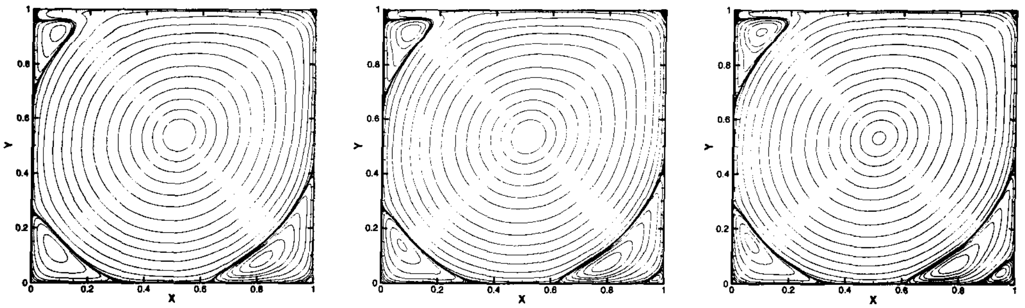

图 2: Re=5000, 7500, 10000 方腔内部流线图

5 结论

本文对Navier-Stokes方程在时间上采用了Kim和Moin的无压力投影法离散，空间上分别采用了四阶迎风紧致格式离散。在Poisson方程求解离散过程中采用了九点四阶紧致格式，并对Neumann边界条件提出了具有三阶精度的紧致差分格式。Taylor涡列数值结果表明，本文所提出的高精度紧致差分投影法在空间上，速度场和压力场均达到了四阶精度。在时间层上，压力和速度在整场中也都达到了二阶精度。同时，驱动方腔的计算结果也显示本文提出的格式具有很好的稳定性，对复杂流体流动有着很好的数值模拟。

参考文献：

[1] Chorin A J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems[J]. Journal of Computational Physics, 1967, 2: 12-25

[2] Kim J, Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 1985, 59: 308-323

[3] Bell J B, Colella P, Glaz H M. A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 1989, 85: 257-283

[4] Van kan J. A second-order projection method for the incompressible flow[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1986, 7(3): 870-891

[5] 刘淼儿，任玉新，张涵信. 数值求解不可压缩流动的投影方法研究进展[J]. 力学进展，2006, 36(4): 591-598
Liu M E, Ren Y X, Zhang H X. Review on the projection methods in the numerical solution of the incompressible flow[J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(4): 591-598

[6] 刘淼儿，任玉新，张涵信. 不可压流动的二阶迭代投影法[J]. 清华大大学学报，2004, 44(5): 685-688
Liu M E, Ren Y X, Zhang H X. Second-order iterative projection methods for solving the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Tsinghua University, 2004, 44(5): 685-688

[7] 刘淼儿，任玉新，张涵信. 求解不可压Navier-Stokes方程的三阶精度投影方法[J]. 清华大大学学报，2005, 45(2): 285-288
Liu M E, Ren Y X, Zhang H X. Third-order projection methods for solving the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Tsinghua University, 2005, 45(2): 285-288

[8] Brown D L, Cortze R, Minion M L. Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 168: 464-499

[9] 田芳，田振夫. 定常对流扩散反应方程非均匀网格上高精度紧致差分格式[J]. 工程数学学报，2009, 26(2): 219-225
Tian F, Tian Z F. A high accuracy compact difference scheme for convection diffusion reaction equation on non-uniform grid[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(2): 219-225

[10] 袁湘江，周恒. 计算激波的高精度数值方法[J]. 应用数学和力学，2000, 21(5): 441-450
Yuan X J, Zhou H. Numerical schemes with high order of accuracy for the computation of shock waves[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(5): 441-450

[11] 李新亮，傅德薰，马延文. 8阶群速度控制格式及其应用[J]. 力学学报，2004, 36(1): 79-83
Li X L, Fu D X, Ma Y W. Optimized group velocity control scheme[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(1): 79-83

[12] 梁贤，田振夫. 求解Navier-Stokes方程组的组合迎风紧致格式[J]. 计算物理，2008, 25(6): 659-667
Liang X, Tian Z F. Combined compact upwind difference schemes for Navier-Stokes equations[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2008, 25(6): 659-667

[13] Abide S, Viazzo S. A 2D compact fourth-order projection decomposition method[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 206: 252-276

[14] 田振夫. 数值求解Poisson方程的四阶紧致差分格式[J]. 宁夏大学学报，1995, 16(3): 22-25
Tian Z F. A kind of h^4 compact difference schemes for solving Poisson equations[J]. Journal of Ningxia University, 1995, 16(3): 22-25

[15] Zheng Z, Perzold L. Runge-Kutta-Chebyshev projection method[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 219: 976-991

[16] Shen J. Hoof bifurcation of the unsteady regularized driven cavity flow[J]. Journal of Computational Physics, 1990, 48: 387-411

A Projection-based High-order Compact Scheme for Solving Incompressible Flows

WANG Ping, TIAN Zhen-fu†

(Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract: In this paper, based on the Kim and Moin projection technique, we develop a high-order compact difference method with spatial order 4 and temporal order 2 for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations. In particular, we propose a new compact discretization formula for the Neumann boundary condition of pressure. Numerical experiments are performed to validate the accuracy and robustness of the presented scheme. The simulation results of the regularized driven cavity are in good agreement with the existing solutions in the literature.

Keywords: compact scheme; incompressible flows; second-order projection methods; Navier-Stokes equations

Received: 22 Sep 2009. **Accepted:** 06 Nov 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10662006; 10972058).

†**Corresponding author:** Z. Tian. E-mail address: zftian@fudan.edu.cn